ANALYSE DIMENSIONNELLE

Quelle est la période T d'un pendule de longueur L placé dans un champ de pesanteur g ? Est-ce $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$ ou bien $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$?

T s'exprimant en s, L en m et g en $m.s^{-2}$, et les deux membres d'une égalité devant posséder la même unité, la bonne réponse est donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. C'est le principe de base de l'analyse dimensionnelle développé ci-dessous.

I Principe

1) Dimensions principales

Il existe un certain nombre de dimensions principales, briques élémentaires, à partir desquelles on peut construire la dimension de toutes les grandeurs physiques :

* Longueur notée **L (en m)**, temps **T (s)**, et masse **M (kg)** permettent de traiter toute la mécanique ;
* En ajoutant l'intensité d'un courant électrique **I (A)**, on traite toute l'électricité ;
* Avec en plus la température absolue **θ (K)**, les grandeurs thermodynamiques peuvent être écrites ;
* on peut allonger la liste pour traiter tel ou tel domaine particulier de la physique.

Les dimensions des autres grandeurs (et donc leurs unités) dérivent des précédentes.
En notant G une grandeur physique quelconque, la **dimension de G** notée [G] s'écrit alors $\mathbf{[G] = M^{\alpha}\, L^{\beta}\, T^{\gamma}\, I^{\delta}\, \theta^{\mu} \ldots}$,
($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$, ...) étant des nombres entiers ou rationnels, positifs ou négatifs.
Il suffit pour cela de trouver n'importe quelle formule physique dans laquelle la grandeur intervient.

Quelques exemples :

* Vitesse $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$ d'après sa définition donc $[v] = LT^{-1}$, unité : $m.s^{-1}$;

Toute vitesse, quelle qu'elle soit, aura donc cette dimension, et donc cette unité, même établie à partir d'une autre formule.

* Accélération $a = \frac{\text{vitesse}}{\text{temps}}$ d'après sa définition donc $[a] = LT^{-2}$ en $m.s^{-2}$;
* Force $F = \text{masse} \times \text{accélération}$ d'après la deuxième loi de Newton donc $[F] = MLT^{-2}$ en $kg.m.s^{-2}$ (Newton N) ;
* Energie E ou travail W en prenant la célèbre formule d'Einstein $E = mc^2$, ou la définition de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, ou bien encore la définition du travail $W = \text{force} \times \text{longueur}$: $[E] = [W] = ML^2T^{-2}$ en $kg.m^2.s^{-2}$ (Joule J) ;
* Tension électrique $U = \frac{\text{puissance}}{\text{intensité}}$ donne $[U] = ML^2T^{-3}I^{-1}$ en $kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$ (Volt V).

2) Equation aux dimensions

On doit avoir la même dimension de part et d'autre d'une égalité. Cette vérification porte le nom de **bilan d'homogénéité**.
Toute relation physique doit être homogène.

II Utilisation

1) Donner une unité

Pour mémoire, voir ci-dessus.

2) Etablir une loi physique

C'est l'application la plus puissante des bilans d'homogénéité. Si, à partir de l'expérience, on sait qu'une grandeur physique dépend d'un certain nombre d'autres grandeurs, on peut établir précisément cette dépendance uniquement à partir de considérations dimensionnelles sans faire appel aux lois de la physique.

a) Formule de Stockes

Expérimentalement, on s'aperçoit que la force de frottement f subie par une sphère en mouvement immergée dans un fluide dépend uniquement de son rayon R, de sa vitesse v et du coefficient de viscosité du fluide η ($[\eta] = M\,L^{-1}\,T^{-1}$).
Quelle est l'équation reliant f à R, v et η ?
On écrit $f = k\, \eta^x\, R^y\, v^z$, avec k un éventuel coefficient numérique sans dimension.
L'équation aux dimensions va permettre de trouver la valeur des coefficients x, y et z.
$[f]= M\,L\,T^{-2}$ $[\eta]=M\,L^{-1}\,T^{-1}$ $[R] = L$ $[v] = L\,T^{-1}$
$[f] = [\eta]^x\,[R]^y\,[v]^z \Rightarrow M\,L\,T^{-2} = (M\,L^{-1}\,T^{-1})^x\,L^y\,(L\,T^{-1})^z$
Soit en regroupant : $M\,L\,T^{-2} = M^x\,L^{-x+y+z}\,T^{-x-z}$
On en déduit un système de trois équations à trois inconnues afin que l'exposant de chaque dimension principale soit le même des deux côtés de l'égalité : $x = 1$; $-x + y + z = 1$; $-x - z = -2$.
Sa résolution donne immédiatement : $x = y = z = 1$
On en déduit $f = k\,\eta\,R\,v$.
On remarque par exemple que cette force est proportionnelle à la vitesse et au rayon de la sphère, sans pour cela qu'il ait été nécessaire d'avoir recours à une quelconque loi physique.
La formule complète est $f = 6\,\pi\,\eta\,R\,v$, le coefficient numérique k pouvant être obtenue à partir des mesures expérimentales.

b) Célérité du son dans un fluide

Notée v, elle dépend uniquement de la masse volumique ρ du fluide et du coefficient de compressibilité du gaz χ (qui est dimensionnellement l'inverse d'une pression P, cette dernière étant définie comme le rapport d'une force F sur une surface S).
On écrit $v = k\,\rho^x\,\chi^y$
$[v] = L\,T^{-1}$ $[\rho] = M\,L^{-3}$ $[\chi] = \frac{1}{[P]} = \frac{[S]}{[f]} = \frac{L^2}{MLT^{-2}} = M^{-1}\,L\,T^2$
$[v] = [\rho]^x\,[\chi]^y \Rightarrow L\,T^{-1} = (M\,L^{-3})^x\,(M^{-1}\,L\,T^2)^y \Rightarrow L\,T^{-1} = M^{x-y}\,L^{-3x+y}\,T^{2y} \Rightarrow x - y = 0; -3x + y = 1; 2y = -1$
On obtient $x = y = -\frac{1}{2} \rightarrow v = \frac{k}{\sqrt{\rho\chi}}$
L'expérience donne au final ici $v = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}$.

3) Vérifier l'homogénéité d'une solution

C'est l'utilisation la plus courante de l'analyse dimensionnelle. Elle permet de repérer les formules fausses résultant d'erreurs de calcul à partir de leur non - homogénéité.
Exemple en optique : on établit la relation $p' = \frac{p + f'}{pf'}$ à partir de la relation de conjugaison d'une lentille mince $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.
Le résultat a-t-il des chances d'être juste ?
[membre de gauche] = L [membre de droite] = $L/L^2 = L^{-1}$ La formule est donc fausse car non homogène.
Un rapide calcul permet de vérifier que le bon résultat est $p' = \frac{pf'}{p + f'}$.

Conclusion : une formule homogène a des chances d'être juste. Il n'y a cependant pas de certitude car $p' = \frac{pf'}{p - f'}$ est homogène mais pourtant faux.
Par contre, **une formule non homogène est nécessairement fausse**.
Toute formule donnée doit être homogène. Il ne s'agit pas de vérifier l'homogénéité à chaque ligne de calcul, mais sur le résultat final, et éventuellement à chaque étape importante d'un long calcul.